SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Exercices : Démontrer si une suite est arithmétique
La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

Méthode

Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence doit être constante et indépendante de n.

n° 26 et 27 page 31.

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Pour tout entier naturel n, on a : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Et de façon générale, pour tout entiers naturels n et p on a :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Démonstration au programme - en vidéo ici : *https://youtu.be/Jn4_xM_ZJD0*

Exemple :

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

Exercices : n° 56 et 54 page 34.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

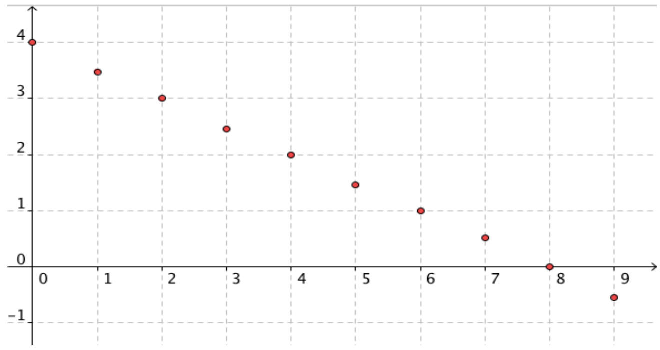
Montrer que la suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante.

Exercices : n° 65, 67 et 68 pages 35 et 36.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



4) Somme arithmétique

Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte.

Avez-vous le même talent que Gauss ?

Calculer en moins de 2 min (sans outils numériques) la somme suivante :

$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 =$

Propriété : n est un entier naturel non nul alors on a : $\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \quad}$

Remarque :

Démonstration en vidéo :

Exercices : n° 60 page 34 + n° 37 page 32.

II. Suites géométriques

1) Définition

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple : Démontrer si une suite est géométrique

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

Exercices : n° 29 et 31 page 31.

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.
On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$ $u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$
On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1{,}04^n$.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $\boxed{u_n = u_0 \times q^n.}$
Et de façon générale, pour tout entiers naturels n et p on a : $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}.}$

Exemple : Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Exercice : n° 69 page 36.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.

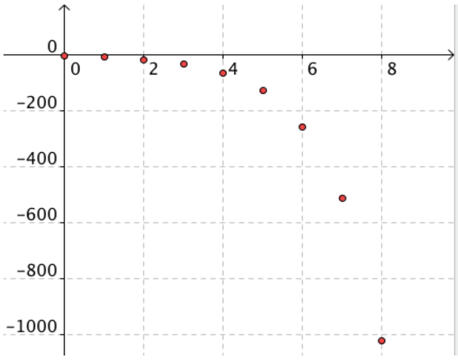
Pour $u_0 > 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:
$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$.
- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison ……… et de premier terme ……..



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Exercices : n° 77 et 74 pages 37 et 36.

3) Somme géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$\boxed{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1}$

Ainsi :
$S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1})$
$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$
$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$
$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple :

Calculer la somme S suivante :
$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{13}$

Exercices : n° 72, 80 et 81 pages 36 et 37.